

◀	<i>Tartalom</i>	<i>Fogalmak</i>	<i>Törvények</i>	<i>Képletek</i>	<i>Lexikon</i>	▶
---	-----------------	-----------------	------------------	-----------------	----------------	---

## Hajítások

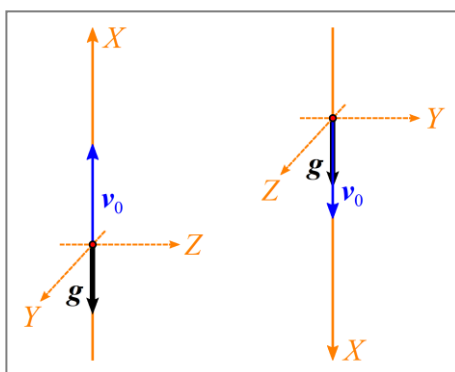
*Hajításnak* nevezzük az olyan mozgást, amelynél a Föld (vagy valamely más égitest) felszínének közelében leeső pontszerű testnek van kezdősebessége. A hajítás mindig két mozgás összegének tekinthető: a test egyrészt a kezdősebességtől függő irányban egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, a mozgás függőleges összetevője pedig egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás. Hajítás például a kilőtt lövedék mozgása vagy a szökőkútból kilövellő vízcseppek mozgása. A hajítások a kezdősebesség irányától függően osztályozhatók: *függőleges hajítás*, *vízszintes hajítás*, *ferde hajítás*.



### Függőleges hajítás

A **függőleges hajítás** kezdősebessége függőleges. A test ilyenkor egyrészt egyenes vonalú egyenletes mozgást végez a kezdősebességtől függően felfelé vagy lefelé, másrészt egyenes vonalú egyenletesen változó mozgással esik lefelé. E két mozgás összegeként a *függőleges hajítás egy függőleges pályán végbemenő, egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás*.

A mozgás leírásához vegyünk fel egy koordináta-rendszert úgy, hogy az origó a test kiindulási ( $t = 0$  időponthoz tartozó) helyzeténél legyen és az  $X$  tengely a kezdősebesség irányába mutasson! Mivel a  $g$  nehézségi gyorsulás is függőleges, ezért a test végig az  $X$  tengely mentén mozog, azaz az  $Y$  és a  $Z$  koordináta folyamatosan nulla marad. (Emiatt az  $Y$  és a  $Z$  koordinátával, továbbá a sebesség és a gyorsulás  $Y$  és a  $Z$  irányú összetevőjével az egyenes vonalú mozgásoknál leírtaknak megfelelően nem foglalkozunk. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért a nehézségi gyorsulás  $X$  irányú összetevőjét  $g_x$  helyett  $g$ -vel jelöljük.)



Mivel a függőleges hajítás egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás, ezért a test gyorsulása, sebessége, illetve elmozdulása a már megismert módon függ az időtől:

$$a = g = \text{állandó}, \quad (1)$$

$$v = v_0 + g \cdot t, \quad (2)$$

$$\Delta x = v_0 \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2. \quad (3)$$

Mivel a koordináta-rendszer  $X$  tengelye a kezdősebesség irányába mutat, a fenti képletekben a nehézségi gyorsulás függőleges összetevőjének előjele a kezdősebesség irányától függ. Felfelé történő hajításnál az  $X$  tengely felfelé mutat, a nehézségi gyorsulás ezzel ellentétes irányú, így  $g$  negatív (a Földön  $g = -9,81 \text{ m/s}^2$ ). Lefelé történő hajításnál az  $X$  tengely lefelé mutat. A nehézségi gyorsulás ugyanilyen irányú, ezért  $g$  pozitív (a Földön  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ).

### ***Függőleges hajítás felfelé***

Felfelé történő hajításnál a test először emelkedik, majd a maximális magasság elérése után mindaddig süllyed, amíg el nem éri a talajt (vagy bele nem ütközik valamibe). Előfordulhat (ha például az indulási hely a talajszint felett volt), hogy a test a kiindulási szint alá kerül, azaz az  $X$  koordinátája negatívvá válik.

A hajítás magassága a kiindulási pont és a pálya tetőpontja közti  $h$  szintkülönbség. A test addig emelkedik, amíg a sebesség 0 nem lesz. Ha az emelkedés időtartamát  $t_e$  jelöli, akkor (2) alapján:

$$0 = v_0 + g \cdot t_e.$$

Ebből az emelkedés időtartama:

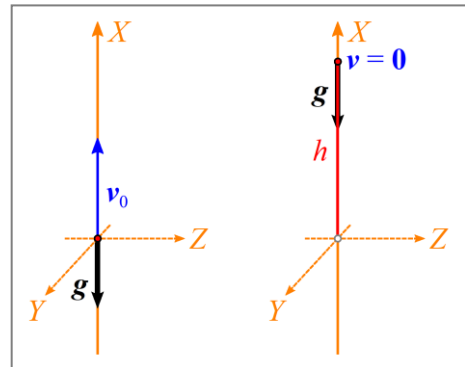
$$t_e = -\frac{v_0}{g}.$$

Ezt a (3) egyenletbe helyettesítve:

$$h = \Delta x = v_0 \cdot t_e + \frac{g}{2} \cdot t_e^2 = -v_0 \cdot \frac{v_0}{g} + \frac{g}{2} \cdot \left(-\frac{v_0}{g}\right)^2 = -\frac{v_0^2}{g} + \frac{v_0^2}{2g} = -\frac{v_0^2}{2g}.$$

Eszerint a hajítás magassága:

$$h = -\frac{v_0^2}{2g}.$$



A *visszaérkezés időtartama* az a  $t_v$  időtartam, amely alatt test újra visszaér a kiindulási pontba. Az elmozdulásra vonatkozó (3) összefüggés alapján:

$$0 = v_0 \cdot t_v + \frac{g}{2} \cdot t_v^2.$$

Mivel  $t_v > 0$ , az egyenlet mindkét oldalát eloszthatjuk vele:

$$0 = v_0 + \frac{g}{2} \cdot t_v.$$

Ebből a *visszaérkezés időtartama*:

$$t_v = -\frac{2 \cdot v_0}{g}.$$

A *visszaérkezés sebessége* az a  $v_v$  sebesség, amellyel a test visszaérkezik a kiindulási szintre. A visszaérkezés időtartamára kapott kifejezést a (2) egyenletbe helyettesítve:

$$v_v = v_0 + g \cdot t_v = v_0 - g \cdot \frac{2 \cdot v_0}{g} = -v_0,$$

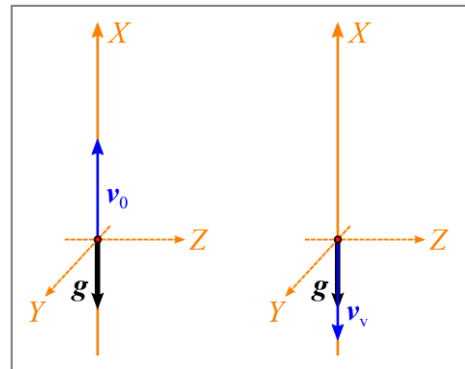
azaz a *visszaérkezés sebessége*:

$$v_v = -v_0.$$

Eszerint a visszaérkező test sebessége ugyanakkora, mint a kezdősebesség, de azzal ellentétes irányú.

### ***Függőleges hajítás lefelé***

Lefelé történő hajításnál a test mindaddig süllyed, amíg el nem éri a talajt vagy bele nem ütközik valamibe. A mozgás során a test végig a kiindulási szint alatt van, ezért az  $X$  koordinátája mindvégig pozitív. (Ne feledjük, hogy az  $X$  tengely lefelé történő hajításnál lefelé mutat.)



A *leérkezési idő* az a  $t_{le}$  időtartam, amely alatt a test leérkezik a talajra. Ha az indulási pont  $h$  magasságban van a talaj felett, akkor a talajra érkezéskor a (3) alapján:

$$h = \Delta x = v_0 \cdot t_{le} + \frac{g}{2} \cdot t_{le}^2.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek egyetlen pozitív megoldása van, így a *leérkezési idő*:

$$t_{le} = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}}{g}.$$

A *leérkezés sebessége* az a  $v_{le}$  sebesség, amellyel a talaj felett  $h$  magasságban levő pontból ledobott test eléri a talajt. A leérkezési időre előzőleg kapott kifejezést a (2) egyenletbe helyettesítve:

$$v_{le} = v_0 + g \cdot t_{le} = v_0 + g \cdot \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}}{g} = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}.$$

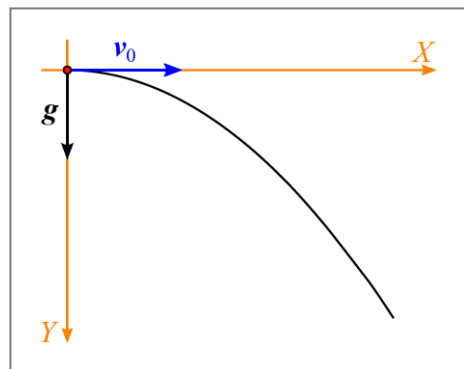
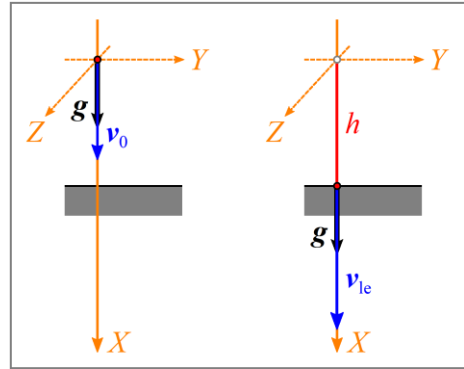
Eszerint a *leérkezési sebesség*:

$$v_{le} = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}.$$

## Vízszintes hajítás

A *vízszintes hajítás* kezdősebessége vízszintes. A test emiatt vízszintesen egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, másrészt egyenes vonalú egyenletesen változó mozgással esik lefelé. A két mozgás eredményeként a test egy függőleges síkban fekvő, görbe vonalú pályán mozog.

A mozgást célszerű egy olyan koordináta-rendszerben leírni, amelynek kezdőpontja a test kiindulási ( $t = 0$  időponthoz tartozó) helyzeténél van, az  $X$  tengelye a kezdősebesség irányába, az  $Y$  tengelye pedig függőlegesen lefelé mutat. (Mivel a test végig az  $XY$  síkban mozog, a test  $Z$  koordinátája folyamatosan nulla, így ezzel, valamint az elmozdulás, a sebesség és a gyorsulás  $Z$  irányú összetevőjével a nem foglalkozunk.)



A mozgás vízszintes összetevője egyenes vonalú egyenletes mozgás, ezért a test  $X$  irányú gyorsulása, sebessége és elmozdulása a következőképpen függ az időtől:

$$a_x = 0,$$

$$v_x = v_0 = \text{állandó},$$

$$\Delta x = v_0 \cdot t.$$

A mozgás függőleges összetevője szabadesés, ezért a test  $Y$  irányú gyorsulása, sebessége és elmozdulása a következőképpen függ az időtől:

$$a_y = g = \text{állandó},$$

$$v_y = g \cdot t,$$

$$\Delta y = \frac{g}{2} \cdot t^2.$$

Láttuk, hogy két mozgás összegződésekor a gyorsulások, sebességek és elmozdulások vektoriálisan összeadódnak, ezért vízszintes hajtásnál a gyorsulás, a sebesség és az elmozdulás nagysága:

$$a = a_y = g,$$

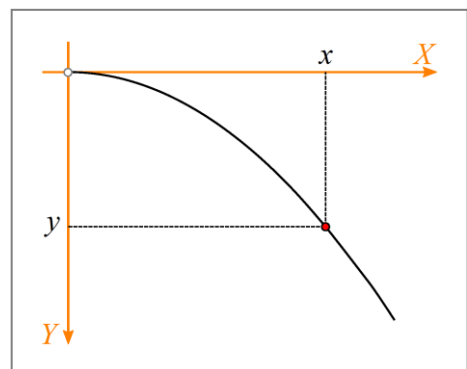
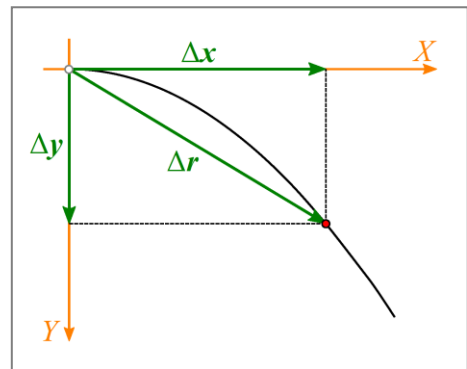
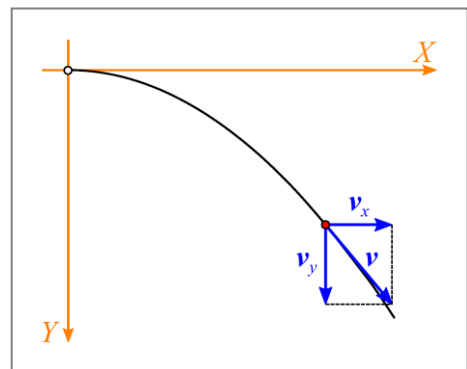
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

A mozgás pályájának meghatározásánál vegyük figyelembe, hogy olyan koordináta-rendszert használunk, amelynek kezdőpontja a test kiindulási helyzeténél van. Emiatt az  $X$ , illetve  $Y$  irányú elmozdulás egyúttal megegyezik a test  $X$ , illetve  $Y$  koordinátájával, így

$$x = v_0 \cdot t,$$

$$y = \frac{g}{2} \cdot t^2.$$



Az első egyenletből az időt kifejezve:

$$t = \frac{x}{v_0}.$$

Ezt a másodikba helyettesítve:

$$y = \frac{g}{2} \cdot t^2 = \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = \frac{g}{2 \cdot v_0^2} \cdot x^2,$$

azaz

$$y = \frac{g}{2 \cdot v_0^2} \cdot x^2. \quad (4)$$

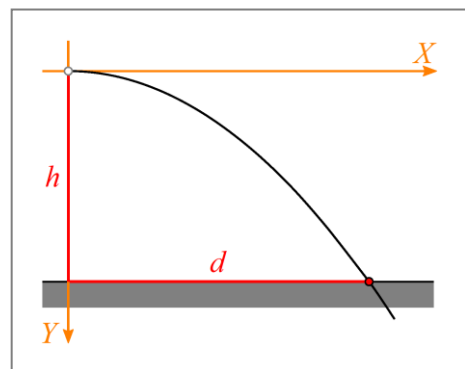
A jobb oldalon az  $x^2$  együtthatója állandó, ezt az értéket  $c$ -vel jelölve a pálya egyenlete:

$$y = c \cdot x^2.$$

Az ilyen alakban megadható függvények képe olyan parabola, amelynek tengelypontja az origóban van, és szimmetriatengelye az  $Y$  tengely. Eszerint *a vízszintes hajításnál a pálya egy függőleges tengelyű parabola*. A test a parabola tengelypontjából indul, és mindaddig a parabola mentén mozog, amíg el nem éri a talajt, vagy bele nem ütközik valamibe.

A *hajítás távolsága* az a  $d$  távolság, amelyet a vízszintes talaj feletti pontból induló test vízszintesen megtesz a talajra érkezésig. Ha az indulási hely  $h$  magasságban van a talaj felett, akkor a talajra érkezéskor  $y = h$ , így az (4) alapján:

$$h = \frac{g}{2 \cdot v_0^2} \cdot d^2.$$

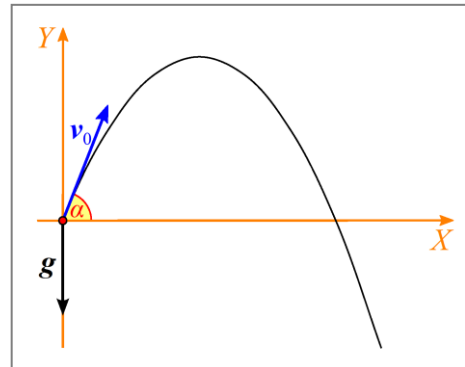


Ennek a másodfokú egyenletnek egyetlen pozitív megoldása van:

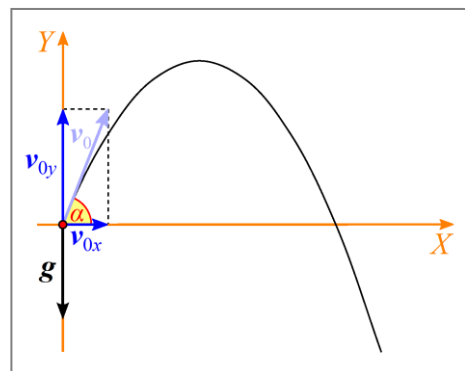
$$d = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \cdot v_0.$$

## Ferde hajítás

Ferde hajítás akkor jön létre, ha a test kezdősebessége nem vízszintes és nem is függőleges. A ferde hajítás két mozgás összegének tekinthető: a test vízszintesen egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, a mozgás függőleges összetevője pedig egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás. A két mozgás eredményeként a test egy függőleges síkban fekvő, görbe vonalú pályán mozog.



A  $v_0$  kezdősebesség felbontható egy vízszintes és egy függőleges összetevőre. A mozgást célszerű egy olyan koordináta-rendszerben leírni, amelynek kezdőpontja a test kiindulási ( $t = 0$  időponthoz tartozó) helyzeténél van, az  $X$  tengelye a kezdősebesség vízszintes összetevőjének irányába,  $Y$  tengelye pedig függőlegesen felfelé mutat. (Mivel a test végig az  $XY$  síkban mozog, a test  $Z$  koordinátája folyamatosan nulla, így ezzel, valamint az elmozdulás, a sebesség és a gyorsulás  $Z$  irányú összetevőjével a továbbiakban nem foglalkozunk. A függőleges hajításhoz hasonlóan a nehézségi gyorsulás  $Y$  irányú összetevőjét  $g_y$  helyett most is  $g$ -vel jelöljük.)



A kezdősebességnek az  $X$  tengellyel bezárt forgásszögét a továbbiakban  $\alpha$  jelöli. A kezdősebesség  $X$  és  $Y$  irányú összetevője a kezdősebesség nagyságával és az  $\alpha$  szöggel felírva:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha,$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha.$$

A mozgás vízszintes összetevője egyenes vonalú egyenletes mozgás, ezért a test  $X$  irányú gyorsulása, sebessége és elmozdulása a következőképpen függ az időtől:

$$a_x = 0,$$

$$v_x = v_0 \cdot \cos\alpha = \text{állandó}, \quad (5)$$

$$\Delta x = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha. \quad (6)$$

A mozgás függőleges összetevője egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás, ezért a test  $Y$  irányú gyorsulása, sebessége és elmozdulása a következőképpen függ az időtől:

$$a_y = g = \text{állandó} ,$$

$$v_y = v_0 \cdot \sin \alpha + g \cdot t , \quad (7)$$

$$\Delta y = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha + \frac{g}{2} \cdot t^2 . \quad (8)$$

Ne feledjük, hogy ilyen koordinátarendszert használva  $g$  negatív (a Földön  $g = -9,81 \text{ m/s}^2$ ).

Láttuk, hogy két mozgás összegződésekor a gyorsulások, sebességek és elmozdulások vektoriálisan összeadódnak, ezért *ferde hajtásnál a gyorsulás, a sebesség és az elmozdulás nagysága:*

$$a = a_y = g ,$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} ,$$

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} .$$

A mozgás pályájának meghatározásánál vegyük figyelembe, hogy a koordináta-rendszer kezdőpontja a test kiindulási helyzeténél van, így az  $X$ , illetve  $Y$  irányú elmozdulás egyúttal megegyezik a test  $X$ , illetve  $Y$  koordinátájával. Ennek megfelelően:

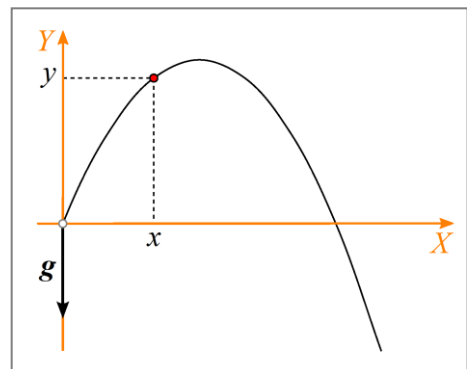
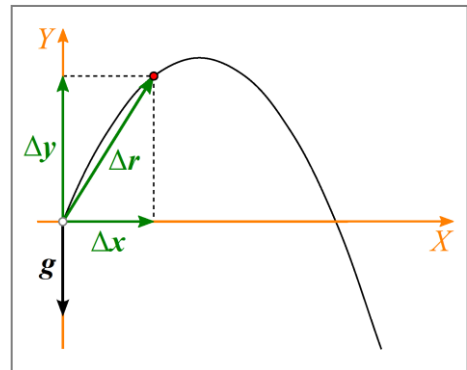
$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha ,$$

$$y = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha + \frac{g}{2} \cdot t^2 .$$

Az első egyenletből kifejezve a  $t$  időt:

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha} .$$

Ezt a második egyenletbe helyettesítve:





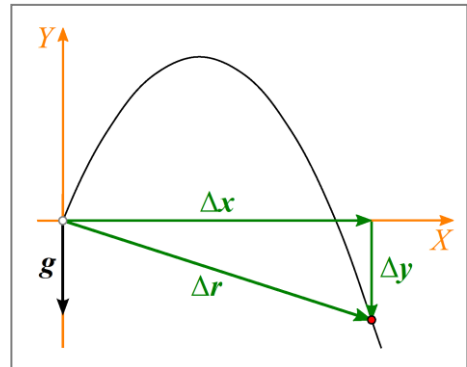
$$y = v_0 \cdot \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha} \cdot \sin \alpha + \frac{g}{2} \cdot \left( \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha} \right)^2,$$

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x^2. \quad (9)$$

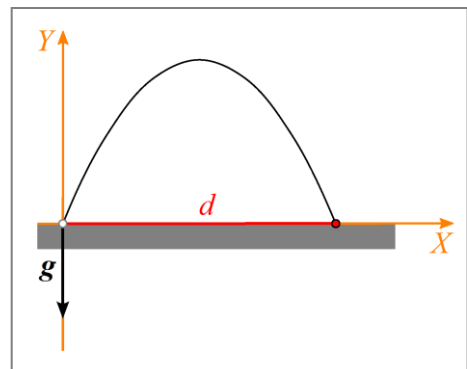
A kapott összefüggés szerint az  $y$  az  $x$  másodfokú függvénye, ezért a *ferde hajítás pályája egy olyan parabola, amelynek szimmetriatengelye függőleges.*

### **Ferde hajítás felfelé**

Ha  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ , akkor a test először emelkedik, majd a maximális magasság elérése után mindaddig süllyed, amíg el nem éri a talajt (vagy bele nem ütközik valamibe). Ha a talaj nem vízszintes, akkor előfordulhat, hogy a test a kiindulási szint alá kerül, azaz az  $Y$  koordinátája negatívvá válik.



Ha a test a vízszintes talajról indul, akkor a *hajítás távolsága* az a  $d$  távolság, amelyet a test vízszintesen megtesz addig, amíg újra visszaér a kiindulási szintre ( $y = 0$ ). Ha az ehhez szükséges időtartamot  $t_v$  jelöli, akkor a (9) alapján:



$$0 = v_0 \cdot t_v \cdot \sin \alpha + \frac{g}{2} \cdot t_v^2.$$

Mivel  $t_v > 0$ , mindkét oldalt eloszthatjuk vele:

$$0 = v_0 \cdot \sin \alpha + \frac{g}{2} \cdot t_v.$$

Ebből a *visszaérkezés időtartama*:

$$t_v = -\frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha}{g}.$$

Ezt a (6) egyenletbe helyettesítve:

$$d = v_0 \cdot t_v \cdot \cos \alpha = -v_0 \cdot \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \cdot \cos \alpha = -\frac{v_0^2 \cdot 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g} = -\frac{v_0^2 \cdot \sin 2 \cdot \alpha}{g}.$$

Eszerint a *hajítás távolsága* (ha a test a vízszintes talajról indul):

$$d = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2 \cdot \alpha}{g}.$$

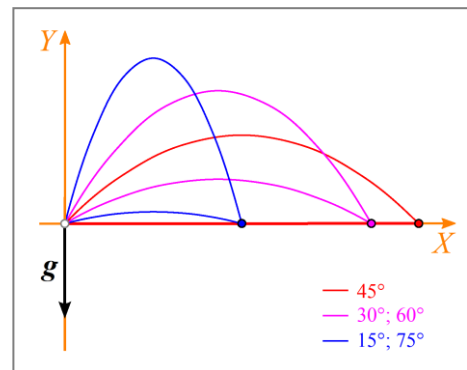
Adott  $v_0$  és  $g$  esetén a hajítás távolsága az  $\alpha$  szögtől függ ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ). A távolság akkor lesz a legnagyobb, ha a képletben a szinuszfüggvény a maximális értéket veszi fel, azaz

$$\sin 2 \cdot \alpha = 1$$

$$2 \cdot \alpha = 90^\circ,$$

$$\alpha = 45^\circ.$$

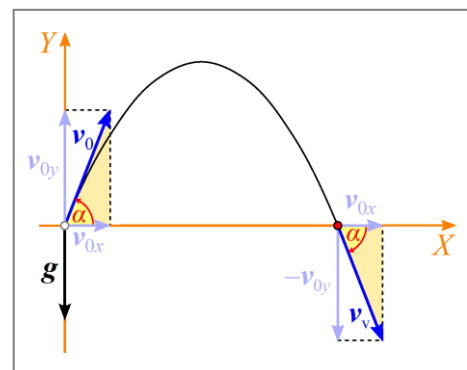
Eszerint adott kezdősebesség és nehézségi gyorsulás mellett (ha a test a vízszintes talajról indul) a hajítás távolsága  $45^\circ$ -os kezdősebességnél a legnagyobb.



A *visszaérkezés sebessége* az a  $v_v$  sebesség, amellyel a test visszaérkezik a kiindulási szintre. A sebesség  $X$  irányú összetevője az (5) szerint állandó, ezért

$$v_{vx} = v_{0x}.$$

A visszaérkezés időtartamára kapott kifejezést a (7) egyenletbe helyettesítve:



$$v_{vy} = v_0 \cdot \sin \alpha + g \cdot t_v = v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha}{g} = -v_0 \cdot \sin \alpha = -v_{0y},$$

azaz

$$v_{vy} = -v_{0y}.$$

A sebesség  $X$  irányú összetevője nem változik, az  $Y$  irányú összetevő viszont az eredetinek az ellentettjévé válik. A rajzon megjelölt két derékszögű háromszög befogói páronként azonos hosszúságúak, ezért a két háromszög egybevágó. Emiatt a két megjelölt hegyesszög is azonos nagyságú, ezért *az  $\alpha$  szögben elhajított test sebessége visszaérkezéskor  $-\alpha$  szöget zár be az  $X$  tengellyel.* Az egybevágóság miatt az átfogók is ugyanakkorák, azaz *a kezdősebesség és a visszaérkezés sebességének nagysága ugyanakkora:*

$$v_v = v_0.$$

A *hajítás magassága* a kiindulási szint és a pálya tetőpontja közti  $h$  szintkülönbség. A test emelkedése addig tart, amíg a sebesség függőleges összetevője 0 nem lesz. Ha az emelkedés időtartamát  $t_e$  jelöli, akkor a (7) alapján:

$$0 = v_0 \cdot \sin \alpha + g \cdot t_e .$$

Ebből az *emelkedés időtartama*:

$$t_e = -\frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} .$$

Ezt az (8) egyenletbe helyettesítve:

$$h = -v_0 \cdot \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \cdot \sin \alpha + \frac{g}{2} \cdot \left( -\frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \right)^2 = -\frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{g} + \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g} = -\frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g} .$$

Eszerint a *hajítás magassága*:

$$h = -\frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g} .$$

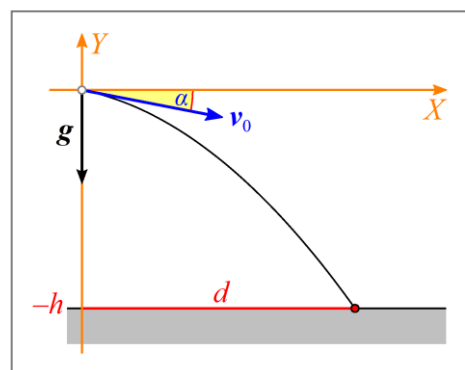
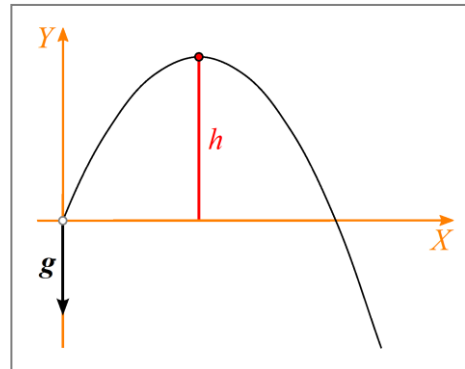
*Megjegyzés:* Az előző gondolatmenetben az  $\alpha$  szögre semmiféle feltétel sem szerepel, ezért a hajítás magasságára kapott fenti összefüggés a *felfelé történő függőleges hajításra* is érvényes ( $\alpha = 0$ ).

### ***Ferde hajítás lefelé***

Ha  $-90^\circ < \alpha < 0^\circ$ , akkor a test mindaddig süllyed, amíg el nem éri a talajt (vagy bele nem ütközik valamibe). Emiatt a test folyamatosan a kiindulási szint alatt halad, azaz az  $Y$  koordinátája negatív.

Ha a test a vízszintes talaj feletti pontból indul, akkor a *hajítás távolsága* az a  $d$  távolság, amelyet a test vízszintesen megtesz a talajra érkezésig. Ha az indulási hely  $h$  magasságban van a talaj felett, akkor a talajra érkezéskor  $y = -h$ , így az (9) alapján:

$$-h = d \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot d^2 .$$



Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai:

$$d_{1,2} = -\frac{v_0 \cdot \cos \alpha}{g} \cdot \left( v_0 \cdot \sin \alpha \pm \sqrt{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha - 2 \cdot g \cdot h} \right).$$

Mivel a  $d$  távolság nem lehet negatív, így a *hajítás távolsága*:

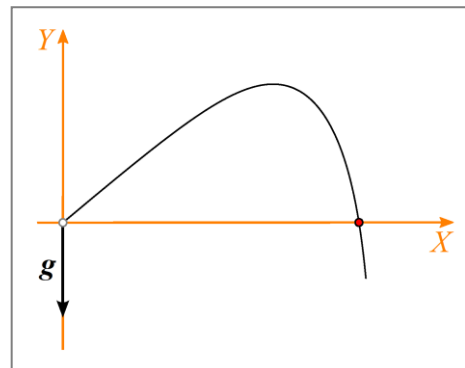
$$d = -\frac{v_0 \cdot \cos \alpha}{g} \cdot \left( v_0 \cdot \sin \alpha - \sqrt{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha + 2 \cdot g \cdot h} \right).$$

*Megjegyzés:* Az előző gondolatmenetben az  $\alpha$  szög nagyságára vonatkozóan semmiféle feltételt nem használtunk fel, ezért a fenti összefüggés a *felfelé történő ferde hajításra* ( $90^\circ > \alpha > 0$ ) és a *vízszintes hajításra* ( $\alpha = 0$ ) is érvényes.

### A közegellenállás és egyéb tényezők szerepe

Mivel a gyakorlatban az elhajított (kilőtt) test nem pontszerű, így további tényezők is befolyásolják a mozgást. Ezek közül a legjelentősebb a közegellenállás (légellenállás).

A nyugvó levegő a mozgás során folyamatosan fékezi a testet, ezért a gyorsulás, a sebesség és az elmozdulás is kisebb a fenti képletek alapján (a közegellenállás elhanyagolásával) kiszámított értéknél. Ennek a következménye az is, hogy vízszintes vagy ferde hajításnál a pálya nem parabola, hanem *ballisztikus görbe*. A szél hatása ugyancsak közegellenállásnak tekinthető, amely a széliránytól függően fékezheti, gyorsíthatja vagy oldalra is eltérítheti a testet.



A test alakja a közegellenállás miatt befolyásolja az elhajított test mozgását. Például a *bumeráng* és a *frizbi* nem parabolapályán mozog, de a lövedékek röppályájának kiszámítása során is figyelembe kell venni a lövedék alakját.



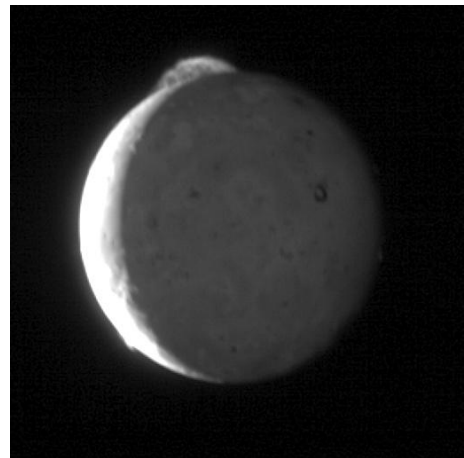
A *siugrás* közben a sportoló a testtartásának (és így saját alakjának) megváltoztatásával szintén jelentősen módosíthatja a pályát és ezzel növelheti a „hajítás” távolságát.



A forgó testek gázokban vagy folyadékban történő mozgását a Magnus-effektus is befolyásolja. Ha például egy labdát úgy rúgnak, dobnak vagy ütnek el, hogy a labda forog, akkor az így „megcsavart” labda pályája többnyire nem síkmozgás, és jelentősen eltérhet a parabolapályától. Ugyancsak erre vezethető vissza, hogy a huzagolt csövű lőfegyverekből kilőtt lövedékek forgó mozgásuk miatt oldalirányba eltérnek („oldalágás”). Mindezt a pontos célzáskor-irányzáskor figyelembe kell venni.

Nagy magasságokba történő hajításkor számolni kell azzal is, hogy a nehézségi gyorsulás a Föld középpontjától távolodva egyre kisebb lesz. Mindez befolyásolja a test mozgását, illetve a pálya alakját is. Nagy távolságra történő hajításkor számolni kell a Föld görbületével is.

Más égitesteken a nehézségi gyorsulás többnyire eltér a Földön mért értéktől, így ott az elhajított testek a földitől eltérő pályán mozognak. Például a meteorbecsapódások vagy vulkánkitörések következtében kidobott törmelék magasabbra és messzebbre repülhet egy olyan égitesten, ahol a nehézségi gyorsulás a földi értéknél kisebb. A meteorbecsapódásból származó törmelék így például a Marsról akár a Földre is eljuthat. (A képen a Jupiter Ió nevű holdja és a Tvashtar vulkán látható.)




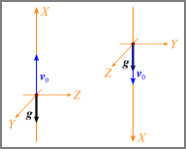
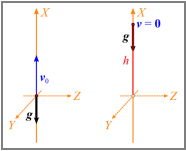
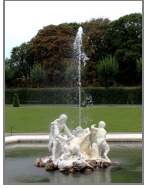
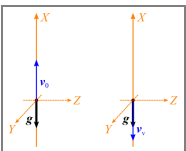
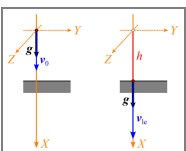
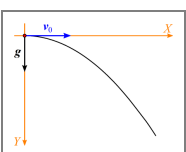
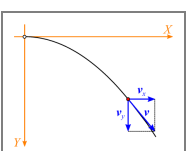
## Kiegészítés

1. Esetenként a függőleges hajítás leírásához másfajta koordináta-rendszert is használnak. Természetesen ilyen koordináta-rendszer használatakor a most megismert képletek többnyire nem érvényesek. Egy-egy hajításra vonatkozó összefüggés alkalmazása előtt tehát meg kell nézni, hogy milyen koordináta-rendszerre vonatkoznak.
2. Függőlegesen felfelé történő hajításnál, illetve felfelé történő ferde hajításnál a visszaérkezési idő éppen kétszerese az emelkedési időnek, azaz:

$$t_v = 2 \cdot t_e,$$

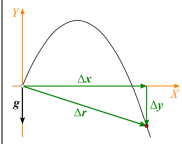
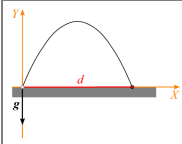
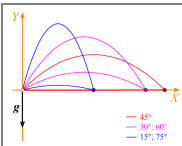
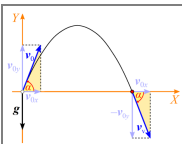
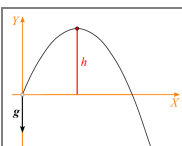
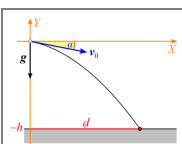
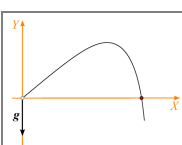


Ez csak úgy lehetséges, hogy a test ugyanannyi ideig emelkedik, mint amennyi ideig a pálya legmagasabb pontjáról visszaér a kiindulási szintre.

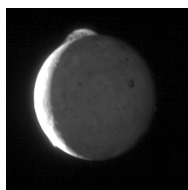
## Képek jegyzéke

	<p><b>A szökőkutak vízcseppjeinek mozgása hajítás</b>  W <a href="https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Belvedere_szokokut_3.jpg">https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Belvedere_szokokut_3.jpg</a></p>
	<p><b>A függőleges hajításnál használt koordináta-rendszerek</b>  © <a href="http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0089.svg">http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0089.svg</a></p>
	<p><b>Az emelkedés magassága függőleges hajításnál</b>  © <a href="http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0090.svg">http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0090.svg</a></p>
	<p><b>Függőleges hajítás szökőkútánál</b>  W <a href="https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Belvedere_szokokut_4.jpg">https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Belvedere_szokokut_4.jpg</a></p>
	<p><b>A visszaérkezés sebessége függőleges hajításnál</b>  © <a href="http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0091.svg">http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0091.svg</a></p>
	<p><b>A leérkezés sebessége függőleges hajításnál</b>  © <a href="http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0092.svg">http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0092.svg</a></p>
	<p><b>A vízszintes hajításnál használt koordináta-rendszer</b>  © <a href="http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0093.svg">http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0093.svg</a></p>
	<p><b>A test sebessége vízszintes hajításnál</b>  © <a href="http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0094.svg">http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0094.svg</a></p>

	<p><b>Az elmozdulás vízszintes hajításnál</b>  © <a href="http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0095.svg">http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0095.svg</a></p>
	<p><b>A pálya vízszintes hajításnál</b>  © <a href="http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0096.svg">http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0096.svg</a></p>
	<p><b>Vízszintes hajítás szökőkútnál</b>  W <a href="https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Belvedere_szokokut_5.jpg">https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Belvedere_szokokut_5.jpg</a></p>
	<p><b>A hajítás távolsága vízszintes hajításnál</b>  © <a href="http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0097.svg">http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0097.svg</a></p>
	<p><b>A ferde hajításnál használt koordináta-rendszer</b>  © <a href="http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/00908.svg">http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/00908.svg</a></p>
	<p><b>A kezdősebesség vízszintes és függőleges összetevője ferde hajításnál</b>  © <a href="http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0099.svg">http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0099.svg</a></p>
	<p><b>Az elmozdulás ferde hajításnál</b>  © <a href="http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0100.svg">http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0100.svg</a></p>
	<p><b>A pálya ferde hajításnál</b>  © <a href="http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0101.svg">http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0101.svg</a></p>
	<p><b>A ferde hajítás ábrázolása egy 1547-ből származó színezett fametszeten</b>  W <a href="https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fotothek_df_tg_0000116_Ballistik_%5E_Kanone.jpg">https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fotothek_df_tg_0000116_Ballistik_%5E_Kanone.jpg</a></p>



	<p><b>A kiindulási szint alatt lévő test elmozdulása ferde hajításnál</b>  © <a href="http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0102.svg">http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0102.svg</a></p>
	<p><b>A hajítás távolsága ferde hajításnál</b>  © <a href="http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0103.svg">http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0103.svg</a></p>
	<p><b>A ferde hajítás azonos nagyságú, eltérő irányú kezdősebességekkel</b>  © <a href="http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0104.svg">http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0104.svg</a></p>
	<p><b>A visszaérkezés sebessége ferde hajításnál</b>  © <a href="http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0105.svg">http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0105.svg</a></p>
	<p><b>A ferde hajítás magassága</b>  © <a href="http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0106.svg">http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0106.svg</a></p>
	<p><b>A hajítás távolsága ferde hajításnál, a talajszint feletti induláskor</b>  © <a href="http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0107.svg">http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0107.svg</a></p>
	<p><b>Ballisztikus görbe</b>  © <a href="http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0108.svg">http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0108.svg</a></p>
	<p><b>Bumeráng</b>  W <a href="https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bumerang_fcm.jpg">https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bumerang_fcm.jpg</a></p>
	<p><b>Síugró</b>  W <a href="https://commons.wikimedia.org/wiki/File:FIS_Ski_Weltcup_Titisee-Neustadt_2016_-_Daniel_Andre_Tande2.jpg">https://commons.wikimedia.org/wiki/File:FIS_Ski_Weltcup_Titisee-Neustadt_2016_-_Daniel_Andre_Tande2.jpg</a></p>



## A Tvashtar vulkán kitörése a Jupiter Ió nevű holdján

**W** <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tvashtarvideo.gif>

### *Jelmagyarázat:*

**©** **Jogvéde**tt anyag, felhasználása csak a szerző (és az egyéb jogtulajdonosok) írásos engedélyével.

**W** A *Wikimedia Commons*-ból származó kép, felhasználása az eredeti kép leírásának megfelelően.

	<a href="#">Tartalom</a>	<a href="#">Fogalmak</a>	<a href="#">Törvények</a>	<a href="#">Képletek</a>	<a href="#">Lexikon</a>	
--	--------------------------	--------------------------	---------------------------	--------------------------	-------------------------	--