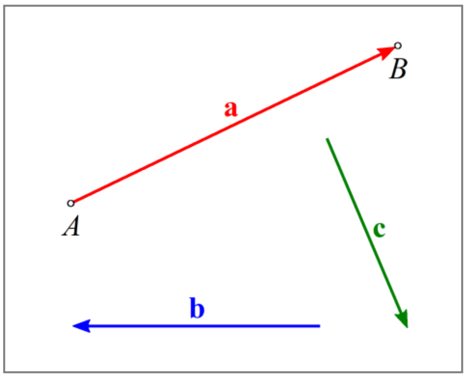
Skalármennyiségek, vektormennyiségek. Vektorműveletek

Az olyan mennyiséget, amelyet egyetlen számérték és a mértékegység egyértelműen meghatároz, skalármennyiségnek nevezzük. Skalármennyiség például a tömeg, a térfogat, a sűrűség, hőmérséklet, az elektromos ellenállás.

Vannak azonban olyan mennyiségek is, amelyeket nem lehet egyértelműen megadni a nagyságuk segítségével. Ha például a *Békés InterCity* sebessége 120 km/h, akkor még nem tudjuk, hogy merre (Budapest vagy Békéscsaba felé) halad. Ha a labdarúgópályán középkezdésnél a játékos a labdát 5 méterrel arrébb rúgja, még nem tudjuk megmondani, hogy hova került, mert ahhoz az elmozdulás irányát is ismerni kellene. *Az olyan mennyiséget, amelynél a nagyság mellett az iránynak is szerepe van, vektormennyiségnek nevezzük.* Vektormennyiség például a sebesség és az erő.

A fizikában gyakran van szükség a vektorokra, ezért ebben a fejezetben röviden, bizonyítások nélkül összefoglaljuk a rájuk vonatkozó leglényegesebb ismereteket.

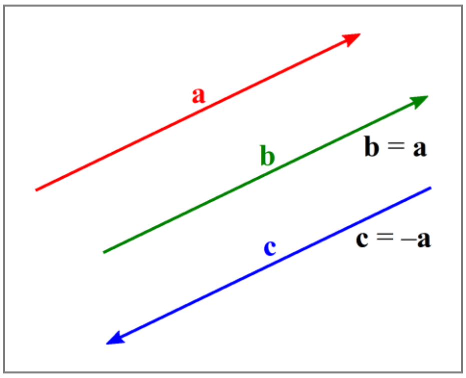


Az irányított egyenes szakaszt vektornak nevezzük. A vektort grafikusan nyíllal ábrázoljuk, a nyíl iránya jelzi a vektor irányát. A vektorokat a továbbiakban vastagon szedett kisbetűkkel jelöljük: **a**, **b**, **c** stb. A vastagbetűs írásmód helyett szokásos jelölés lehet az is, hogy az adott betűt aláhúzzuk, vagy egy nyilat rajzolunk föléje. Az **a** jelölés helyett például (főleg kézírásban) használhatjuk az $\underline{a}$ és az $\vec{a}$ jelöléseket is. Jelölhetjük úgy is a vektorokat, hogy a kezdő- és végpontjukat jelölő, egymás mellé írt két nagybetű fölé egy olyan nyilat rajzolunk, amely a végpontot jelölő betű felé mutat: $\overrightarrow{AB}$.

A vektor nagyságát a vektor abszolútértékének nevezzük. Az **a** vektor abszolútértékét $|\mathbf{a}|$-val jelöljük, de használják még az a, $|\underline{a}|$, $|\vec{a}|$ és $|\overrightarrow{AB}|$ jelöléseket is.

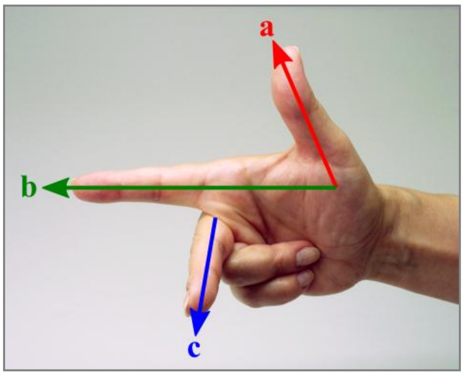
Az olyan vektort, amelynek abszolútértéke (nagysága) nulla, nullvektornak nevezzük. A nullvektor jele **0**. A nullvektor kezdő- és végpontja egybeesik. (A nullvektor iránya ezért nem meghatározott.)

Két vektort akkor tekintünk azonosnak, ha nagyságuk és irányuk is megegyezik. Ha a két vektornak csak a nagysága egyenlő, de irányuk eltérő, akkor a két vektor különböző.



*Az **a** vektor ellentettjének nevezzük azt a vektort, amely **a**-val azonos nagyságú, de iránya ellentétes vele.* Az **a** vektor ellentettjének jele –**a.**

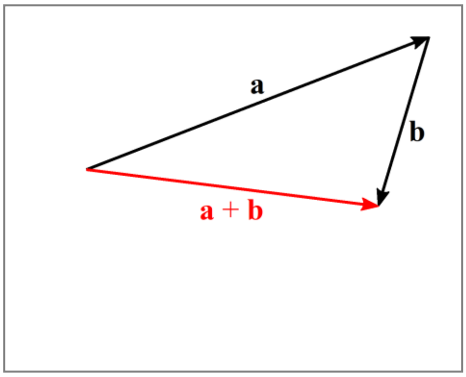
Ha az **a**, **b** és **c** vektorok nem egy síkban vannak, akkor az általuk alkotott vektorrendszert *jobbsodrásúnak* nevezzük, ha a jobb kezünk beállítható úgy, hogy a hüvelykujjunk **a**-val, a mutatóujjunk **b**-vel, középső ujjunk pedig **c**-vel megegyező irányba mutat. (Ha ugyanez csak bal kezünkkel valósítható meg, akkor a vektorrendszer *balsodrású*.)



A vektorok között különféle műveletek értelmezhetők: vektorok összeadása és kivonása, vektor skalárral (számmal) történő szorzása és osztása, valamit két vektor skaláris és vektoriális szorzata. Ezeket a vektorműveleteket az alábbiak szerint értelmezzük:

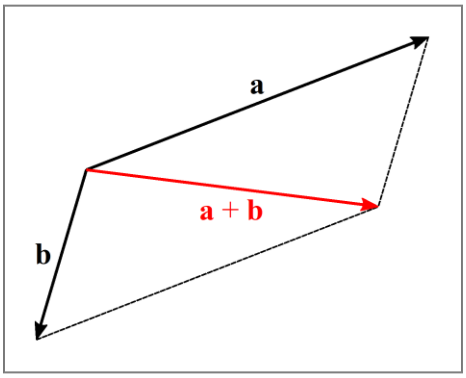
Vektorok összeadása

Az **a** és **b** *vektorok összeadását* **a** + **b**-vel jelöljük. A művelet eredménye egy vektor lesz, amely szerkesztéssel, illetve számítással is meghatározható.

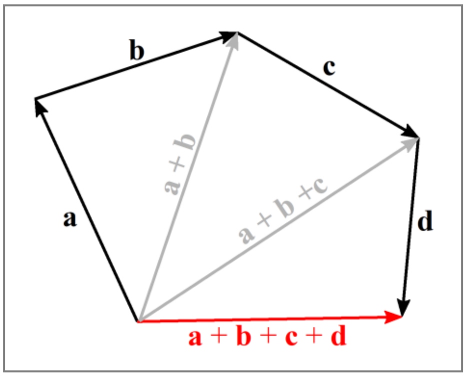


A két vektor összeadásához az első vektor végpontjából kiindulva felrajzoljuk a második vektort. Az összegvektor az első vektor kezdőpontjából a második vektor végpontjába mutató vektor. Ezt az eljárást *háromszögmódszernek* nevezzük.

Ha a két vektor nem párhuzamos és nem esnek egy egyenesbe se, akkor összeadásukat úgy is elvégezhetjük, hogy közös kezdőpontból kiindulva rajzoljuk fel őket, majd mindkét vektor végpontján át egy-egy párhuzamost rajzolunk a másik vektorral. Ezek az egyenesek metszik egymást. Az összegvektor a közös kezdőpontból ebbe a metszéspontba mutató vektor lesz. Ez az eljárás a *paralelogramma-módszer*.

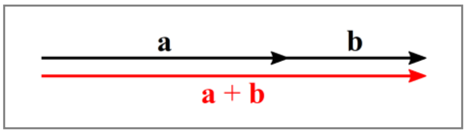


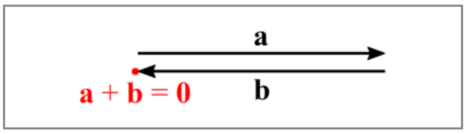
Igazolható, hogy a paralelogramma-módszer ugyanazt az összegvektort eredményezi, mint a háromszögmódszer. A háromszögmódszer azonban párhuzamos, illetve közös egyenesbe eső vektoroknál is használható, továbbá általánosítható több vektorra is. A rajz alapján könnyű belátni, hogy több vektort úgy adhatunk össze, hogy az első vektor végpontjából kiindulva felrajzoljuk a második vektort, annak végpontjából kiindulva a harmadikat stb. Az összegvektor az első vektor kezdőpontjából az utolsó vektor végpontjába mutató vektor lesz. Ezt az eljárást *sokszögmódszernek* nevezzük.

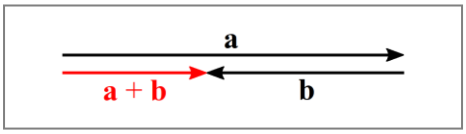


A vektorok összegét számítással a háromszögmódszerből kiindulva, geometriai megfontolások alapján határozhatjuk meg. Ez azonban általános esetben bonyolult lehet, ezért csak néhány speciális esettel foglakozunk:

Ha az összeadandó vektorok *azonos irányúak*, akkor az összegvektor nagysága megegyezik a két vektor nagyságának összegével, iránya pedig ugyanolyan, mint az összeadandó vektoroké. Ha az összeadandó vektorok *azonos nagyságúak és ellentétes irányúak*, akkor az összegvektor nullvektor. Ha az összeadandó vektorok *különböző nagyságúak és ellentétes irányúak*, akkor az összegvektor nagysága akkora, mint a két vektor nagyságának különbsége, iránya pedig megegyezik a nagyobb vektor irányával.

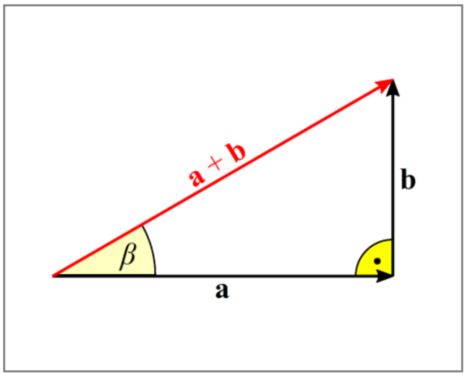






Ha az összeadandó **a** és **b** vektorok merőlegesek, akkor a rajz alapján, a Pitagorasz-tételt is felhasználva belátható, hogy az összegvektor nagysága:

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = \sqrt{a^2+b^2}\ .$$



Az összegvektor irányát ilyenkor szerkesztéssel, vagy számítással határozhatjuk meg. Például a rajzon β-val jelölt szöget a

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$$

képlet alapján számíthatjuk ki.

Igazolható, hogy a vektorok összeadása kommutatív és asszociatív művelet, azaz

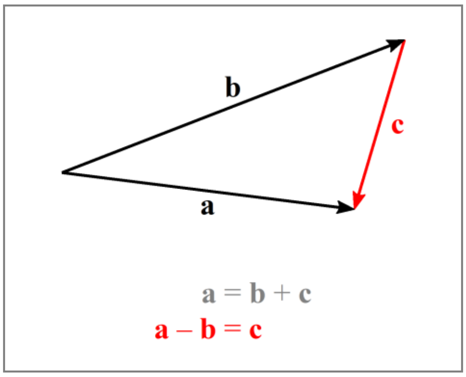
$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a},$$

illetve

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

Emiatt a vektorok összeadását tetszőleges sorrendben végezhetjük el.

Vektorok kivonása



A vektorok kivonását az összeadás inverz (fordított) műveleteként értelmezzük. A rajz szerint **a** = **b** + **c**, ezért mindkét oldalból **b** vektort kivonva **a** – **b** = **c**. Ezek alapján az **a** – **b** *különbségvektor* úgy szerkeszthető meg, hogy közös kezdőpontból kiindulva felrajzoljuk az **a** és **b** vektort. Az **a** – **b** különbségvektor a **b** végpontjából az **a** végpontjába mutató vektor lesz.

A definíció alapján egyszerűen belátható, hogy a kivonás nem kommutatív:

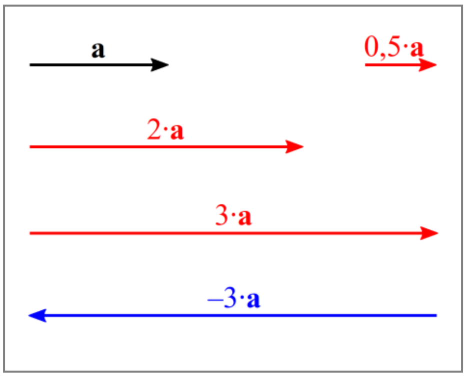
$$\mathbf{b}-\mathbf{a}\neq\mathbf{a}-\mathbf{b}.$$

Ha ugyanis a két vektort felcseréljük, akkor a különbségük az eredeti különbségvektor ellentettje lesz:

$$\mathbf{b}-\mathbf{a}=-(\mathbf{a}-\mathbf{b}).$$

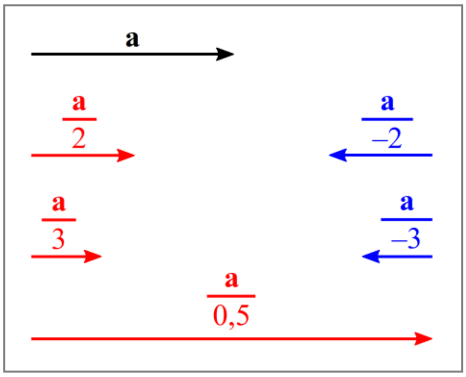
Vektorok szorzása és osztása valós számmal

Az **a** vektor és egy λ valós szám *szorzatán* egy olyan vektort értünk, amelynek nagysága az **a** vektor nagyságának $|\lambda|$-szorosa, iránya pedig megegyezik az **a** vektor irányával, ha λ pozitív, illetve ellentétes az **a** vektor irányával, ha λ negatív. (Ha $\lambda = 0$, akkor a szorzat nullvektor, így iránya nem meghatározott.)



A definíció alapján könnyen belátható, hogy egy vektort 1-gyel megszorozva az eredeti vektort kapjuk, –1-gyel szorozva pedig az eredeti vektor ellentettje lesz az eredmény. Ez utóbbi miatt a vektor ellentettjét a vektor mínusz egyszeresének is nevezik.

Az **a** vektor és egy λ valós szám *hányadosán* egy olyan vektort értünk, amelynek nagysága az **a** vektor nagyságának $\frac{1}{|\lambda|}$-szorosa, iránya pedig megegyezik az **a** vektor irányával, ha λ pozitív, illetve ellentétes az **a** vektor irányával, ha λ negatív. (Ha $\lambda = 0$, akkor a hányadost nem értelmezzük.)



Vektorok skaláris szorzata

Két vektor *skaláris szorzatán* a vektorok abszolútértékének és a köztük lévő szög koszinuszának a szorzatát értjük. A skaláris szorzatot a két vektor közé írt szorzóponttal jelöljük. Ha az **a** és **b** vektorok közti szöget φ-vel jelöljük, akkor a két vektor skaláris szorzata:

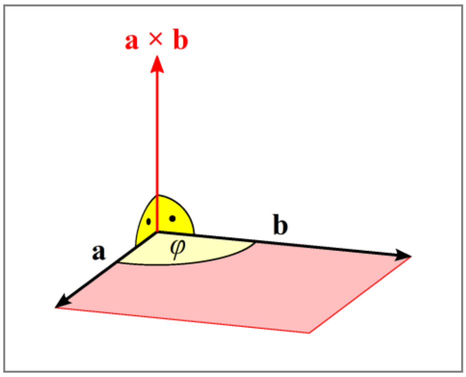
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cdot b \cdot \cos\varphi \, .$$

A definíció alapján belátható, hogy a skaláris szorzat kommutatív művelet, azaz

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \, .$$

Vektorok vektoriális szorzata

Az **a** és **b** vektorok *vektoriális szorzatán* egy vektort értünk, a vektoriális szorzat jelölése: $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ (szóban: **a** kereszt **b**). A szorzatvektor



- nagysága megegyezik a két vektor abszolútértékének és a köztük lévő szög szinuszának a szorzatával,
- merőleges mindkét vektorra,
- továbbá olyan irányú, hogy az **a**, **b** és $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ jobbsodrású rendszert alkot.

Ha az **a** és **b** vektorok közti szöget φ-vel jelöljük, akkor a két vektor vektoriális szorzatának nagysága (abszolútértéke) $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = a\cdot b\cdot \sin\varphi$. (Ez éppen az **a** és **b** vektorok által meghatározott paralelogramma területének felel meg.)

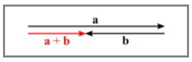
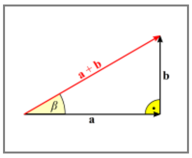
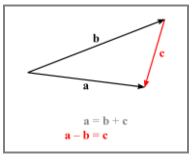
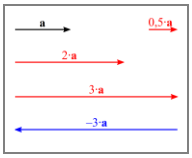
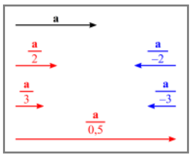
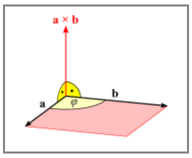
A vektoriális szorzat nem kommutatív:

$$\mathbf{b}\times\mathbf{a}\neq\mathbf{a}\times\mathbf{b}.$$

Ha ugyanis a két vektort felcseréljük, akkor a vektoriális szorzatuk az eredeti szorzatvektor ellentettje lesz:

$$\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

Képek jegyzéke

	**Ellentétes irányú vektorok összege** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0009.svg
	**Merőleges vektorok összege** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0010.svg
	**Vektorok kivonása** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0011.svg
	**Vektor szorzása skalárral** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0012.svg
	**Vektor osztása skalárral** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0013.svg
	**Vektorok vektoriális szorzata** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0014.svg

Jelmagyarázat:

© **Jogvédett anyag**, felhasználása csak a szerző (és az egyéb jogtulajdonosok) írásos engedélyével.

W A ***Wikimedia Commons***-ból származó kép, felhasználása az eredeti kép leírásának megfelelően.